Sarežģītāki uzdevumi par grafu teoriju.

# Uzdevums 1

Emirātā ir 8 pilsētas. Sultāns grib izbūvēt tādu ceļu sistēmu, ka no katras pilsētas var nonākt citā braucot cauri ne vairāk kā vienai citai pilsētai un lai no katras pilsētas izietu ne vairāk kā k ceļi. Kādiem k tas ir iespējams?

# Uzdevums 2

Labirinta pilsētā katrā krustojumā satiekas tieši trīs ielas. Ielas ir izkrāsotas trīs krāsās tā, ka katrā krustojumā satiekas trīs dažādu krāsu ielas. No pilsētas ārā iet tikai trīs ielas. Pierādiet, ka šīs trīs ielas ir dažādās krāsās!

# Uzdevums 3

Plaknē sazīmēti punkti. Daži no šiem punktiem ir savienoti ar nogriežņiem. Ir zināms, ka no katra punkta iziet ne vairāk kā k nogriežņi. Pierādiet, ka punktus izkrāsot, izmantojot k+1 krāsu tā, ka jebkuri divi punkti, kurus savieno nogrieznis, būtu dažādās krāsās!

# Uzdevums 4

Hidra sastāv no kakliem un galvām (katrs kakls savieno tieši divas galvas). Ar vienu zobena cirtienu var pārcirst visus kaklus, kas iziet no vienas Hidras galvas A. Taču, tā izdarot, tūliņ izaug jauni kakli no galvas A uz visām galvām, ar kurām iepriekš A nebija tiešā veidā savienota ar kakliem.

Skaitās, ka Antiņš ir uzveicis Hidru, ja viņam to izdodas sadalīt divās nesavienotās daļās. Ar kādu mazāko skaitu cirtienu Antiņš var uzveikt simtkaklainu Hidru?

# Uzdevums 5

Citurzemē bija 2014 pilsētas. Tās bija savienotas ar ceļiem tā, ka aizliedzot iebraukt un izbraukt jebkurā vienā pilsētā, joprojām bija iespējams nonākt no jebkuras pilsētas jebkurā citā (izņemot aizliegto, protams).

Citurzemes ķēniņam nepatīk cikliski maršruti. Katru gadu viņš izvēlas kādu ciklisku maršrutu savā karaļvalstī un uzbūvē jaunu pilsētu, ar tiešiem ceļiem savienojot to ar visām izvēlētā maršruta pilsētām. Pēc tam cikliskā maršruta ceļus slēdz, jo tie nav ķēniņam tīkami.

Pēc vairākiem šādiem gadiem Citurzemē nav palicis neviens ciklisks maršruts. Pierādiet, ka Citurzemē tagad ir vismaz 2014 pilsētas, no kurām iziet tieši viens ceļš!

# Uzdevums 6

Jānītis un Ilzīte ceļo pa arhipelāgu, kurš sastāv no 2015 salām no kurām dažas ir savienotas ar prāmja maršrutiem.

Viņi vienojās ceļojot spēlēt sekojošu spēli. Vispirms Ilzīte izvēlas salu, uz kuru viņi atlido. Pēc tam viņi pārvietojas ar prāmjiem, pamīšus izvēloties nākošo salu (Jānītis sāk), bet viņi neizvēlas salas, ko jau ir apmeklējuši. Tas, kurš vairs nevar izvēlēties nākošo salu, ir zaudējis.

Vai un kurš var garantēti uzvarēt šajā spēlē?

# Uzdevums 7

Labirinta pilsētā katra iela savieno divus krustojumus un citādi kā šajos krustojumos, ielas nesatiekas. Katra iela ir nokrāsota sarkanā, dzeltenā vai zaļā krāsā. Katrā krustojumā satiekas tieši trīs ielas, visas dažādās krāsās.

Krustojumu sauc par pozitīvu, ja ielu krāsas, skaitot pulksteņa rādītāja virzienā ir sarkana, dzeltena un zaļa. Ja krāsu secība ir otrāda, tad krustojumu sauc par negatīvu.

Pierādiet, ka pozitīvu un negatīvu krustojumu skaita starpība dalās ar 4.